



جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

تاریخ تحویل: ۲۳ دی

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را با ذکر علت مشخص کنید.

- حاصل جمع دو ماتریس hermitian ممکن است برابر با یک ماتریس hermitian نباشد.
 - اگر ماتریس S یک ماتریس hermitian باشد و داشته باشیم $S = A + iB$ ، آنگاه ماتریس‌های A و B هر دو متقارن هستند.
 - هر ماتریس مختلط C را می‌توان به صورت $C = E + iD$ نوشت به صورتی که ماتریس‌های E و D هر دو ماتریس hermitian باشند.
۲. فرض کنید U یک ماتریس واحد است.

الف) ثابت کنید که اگر U در برداری مختلطی مانند x ضرب شود، تنها جهت آن را تغییر می‌دهد و اندازه‌ی آن بردار تغییر نمی‌کند.

ب) برعکس قسمت الف ثابت کنید که اگر گزاره‌ی زیر برقرار باشد، ماتریس U حتماً یک ماتریس واحد است.

$$\|Ux\|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^2$$

۳. ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 2+i \\ -2+i & 0 \end{pmatrix}$$

الف) هر کدام از ماتریس‌های A و B چه خاصیتی دارند؟

ب) برای دو ماتریس بالا نشان دهید

$$-AB = \overline{BA}^T$$

پ) نتیجه‌ای را که در قسمت ب به آن رسیده‌اید، برای هر دو ماتریس $n \times n$ A و B با خاصیت‌های مربوط به قسمت الف بدست آورید.

۴. الف) بردار $c = (1, 1, 0, 1)$ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه‌ی این بردار را بدست آورید.

ب) فرض کنید F_4 برابر با ماتریس فوریه با $n = 4$ باشد. اگر F_4 را به صورت P_4 داشته باشیم، ماتریس‌های D_4 و P_4 را بدست آورید.

$$F_4 = \begin{pmatrix} F_4 & D_4 F_4 \\ F_4 & -D_4 F_4 \end{pmatrix}$$

۵. مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را با استفاده از روش هندسی^۱ حل کنید.

$$\text{maximize } 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

subject to:

$$\begin{aligned} 2x_1 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 3x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

۶. مسئله زیر را با استفاده از روش سیمپلکس حل کنید.

$$\text{maximize } 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

s.t:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &\geq -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

۷. برای شبکه زیر یک بیشینه جریان^۲ و یک برش کمینه^۳ بیابید.

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

method graphical^۱
flow maximal^۲
cut minimal^۳

۸. مربی تیم شنای دانشگاه شریف برای شرکت در مسابقات کشوری شنای مختلط! که در حقیقت متشکل از شنای پروانه، آزاد، قورباغه و کرال پشت است می‌باشد. حال با توجه به اینکه نتیجه مسابقات بسیار مهم است، مربی تصمیم گرفته با توجه به رکورد ۵ دانشجو که به صورت زیر بر حسب ثانیه ثبت شده است، یک تیم ۴ نفره برای شرکت در مسابقات آماده کند.

مدل شنا	آریا	باربد	پدرام	محمد	بنیامین
کرال پشت	۳۷/۷	۳۲/۹	۳۳/۸	۳۷/۰	۳۵/۴
شنای قورباغه	۴۳/۴	۳۳/۱	۴۲/۲	۳۴/۷	۴۱/۸
شنای پروانه	۳۳/۳	۲۸/۵	۳۸/۹	۳۰/۴	۳۳/۶
شنای آزاد	۲۹/۲	۲۶/۴	۲۹/۶	۲۸/۵	۳۱/۱

الف) شبکه‌ای بکشید که این مساله را شبیه‌سازی کند (دقت کنید که تیم مورد نظر ۴ نفره است و ۵ نفر داریم)

ب) مساله را به عنوان یک مساله برنامه‌ریزی خطی مدل کرده و آن را با ابزاری دلخواه حل کنید.

پ) مسئله دوگان این سوال را بنویسید.

ت) در صورتی که مربی بتواند زمان یک شناگر در یک رشته با به اندازه ۵.۰ ثانیه ارتقا بدهد، در اینصورت کدام شناگر انتخاب می‌شود. (دقت کنید که ممکن است جواب یکتا نداشته باشیم)